2017 年度・基礎物理学Ⅰ　第 2 回講義　①

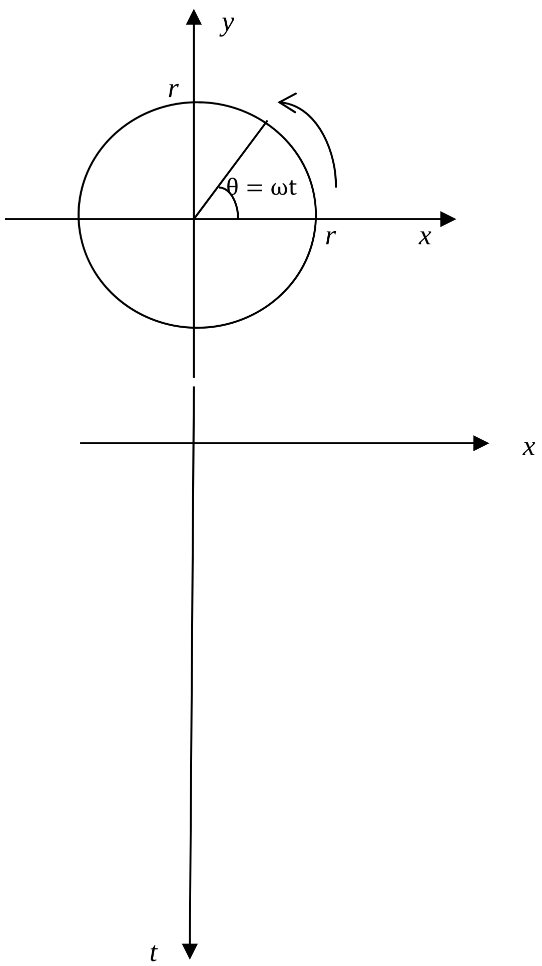
【予習】と【宿題】はレポートにして次週の講義の前日までに 7 号館 P514 室に提出すること。答えだけでなく途中計算も書くこと。宿題と予習は講義の時間に配布するが、Web からもダウンロードできる。http://aplab.konan-u.ac.jp/~tokonatu/kisobuturiI-2017/

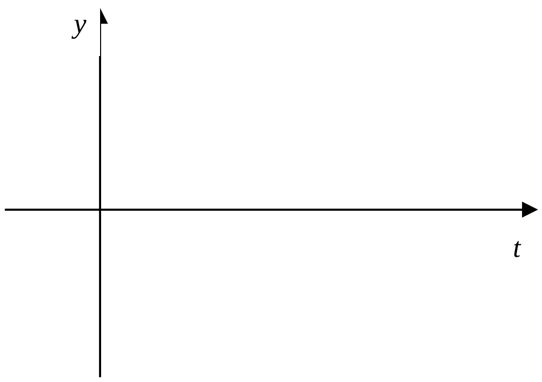
○関数

・関数には入力と出力がある。
　入力と出力の関係を関数という
・入力が複数のとき、多変数関数という
・関数はグラフを書くと理解しやすい

○三角関数　正弦(sinθ)、余弦(cosθ)、正接（tanθ)

角速度　$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ で等速円運動する粒子を考える





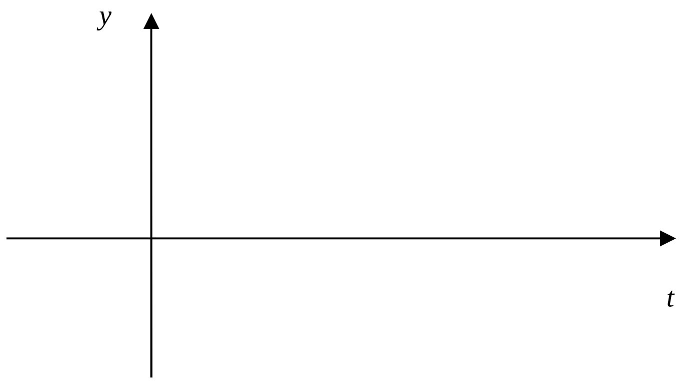
問 1　時刻 t のときの粒子の y 座標と x 座標をそれぞれ図示しなさい

問2　半径5mの円上を等速円運動する粒子を考える。
粒子は円を3秒で一周する。円の中心に原点をとり、時刻 $t=0$　のとき
$(x,y)=(5,0)$を y 軸正の向きに通過した。
以下の問いに答えよ。

(1)　角速度 ω を求めよ

(2)　時刻 $t=0$ のとき、粒子の速度（v_{xo}, v_{yo}）を求めよ

(3)　横軸に時刻 t、縦軸に粒子の y 座標をとったグラフを書け



(4)　粒子の y 座標を t の関数で表せ

(5)　時刻 t の粒子の位置 (x, y)を求めよ

(6)　時刻 t の粒子の速度（v_x, v_y）を求めよ

☆三角関数を2回微分すると元の関数が現れる

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\sin x = \cos x$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}\sin x = -\sin x$$

同様に

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\cos\omega t = -\omega^2\cos\omega t$$

☆波動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\mathrm{f}(t) = -\omega^2\mathrm{f}(t)$$

☆波動関数：波動方程式の解

特殊解

$$\mathrm{f}_1(\mathrm{t}) = \mathrm{C}_1\sin\omega t$$

$$\mathrm{f}_2(\mathrm{t}) = \mathrm{C}_2\cos\omega t$$

一般解

$$\mathrm{f}(\mathrm{t}) = \mathrm{C}_1\sin\omega t + \mathrm{C}_2\cos\omega t$$

ただしC_1とC_2は任意の定数

ここで$\mathrm{C}_1 = \mathrm{A}\cos\delta$　$\mathrm{C}_2 = \mathrm{A}\sin\delta$　とおくと

$$\mathrm{f}(\mathrm{t}) = \mathrm{A}(\sin\omega t\cos\delta + \cos\omega t\sin\delta)$$

三角関数の加法定理より　$\sin(A \pm B) = \sin \mathrm{A}\cos\mathrm{B} \pm \cos\mathrm{A}\sin\mathrm{B}$

$$\mathrm{f}(\mathrm{t}) = \mathrm{A}\sin(\omega \mathrm{t}+\delta)$$

注：波動方程式の解は関数であり複数個ある

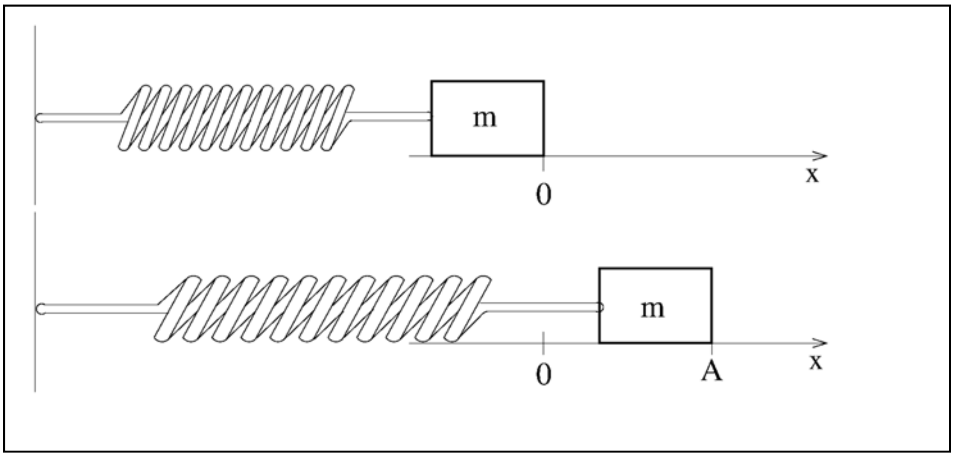
☆ω：角速度　angular velocity

周期 $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}$ [s]

周波数　$\mathrm{f} = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{\omega}{2\pi}$

位相速度をVとすると　波長　$\lambda = \mathrm{VT}$

問 3　調和振動子



滑らかな水平面上で、質量mの小物体にばねを取り付ける。
図のようにばねを A だけのばしてから静かに放す。ばね定数を k として以下の問いに答えよ。

(1)　ばねがおもりを引っ張る力 F を x の関数で表せ

(2)　おもりの運動方程式を求めよ

(3)　(2)の方程式の特殊解を求めよ

(4)　(2)の方程式の一般解を求めよ

(5)　この振動子の周期 T を求めよ

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第2回講義　⑤

問4　x 軸方向の正の向きに進む正弦波がある。時刻 t [s]における位置 x[m]の変位 y[m]は $y = 1.5\sin 2\pi(2t - 0.5x)$ で表される。以下の問いに答えよ

(1)　$t=0$ のときの波をグラフに描け

(2)　$t=0.1$[s]のときの波をグラフに描け

(3)　位置 $x=0$ について時刻 t における変位 y を表すグラフを描け

(4)　位置 $x=1$[m]について、時刻 t における変位 y を表すグラフを描け

(5)　この波の振幅、波長、周期、周波数、位相速さを求めよ

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第2回宿題　①

例題1　関数 $f_1(t) = c_1 \sin\omega t$　が方程式 $\frac{d^2}{dt^2} f(t) = -\omega^2 f(t)$ を満たすことを証明せよ

解　$\frac{d}{dt} f_1(t) = \frac{d}{dt}(c_1 \sin\omega t) = c_1 \omega \cos\omega t$

$\frac{d^2}{dt^2} f_1(t) = \frac{d}{dt}(c_1 \omega \cos\omega t) = c_1 \omega^2 \sin\omega t = -\omega^2 f_1(t)$

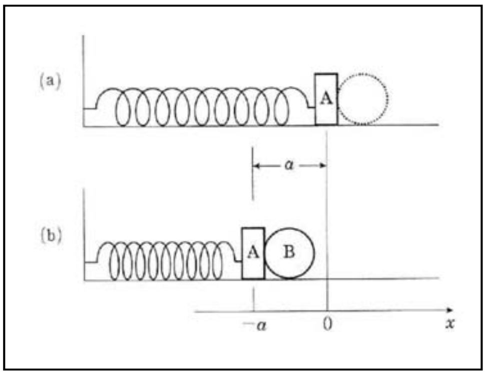
したがって

$$\frac{d^2}{dt^2} f_1(t) = -\omega^2 f_1(t)$$

問1　関数 $f_2(t) = c_2 \cos\omega t$および　関数 $f_3(t) = A \sin(\omega t + \delta)$が

方程式 $\frac{d^2}{dt^2} f(t) = -\omega^2 f(t)$ を満たすことを証明せよ

問2　（2010年度入試問題）滑らかな水平面上で、図(a)に示すように、ばね定数 k[N/m]のばねの一端を固定し、他端に質量 m[kg]の板Aを取り付ける。このばねを自然の長さより a[m]だけ縮め、図(b)に示すように質量M[kg]の球Bを接触させる。この状態で急に手を放したとき、最初はばねの力でAが加速されるため、AがBを押しAとBは一体となって運動をする。この一体運動は、ばねの復元力により引き起こされているため、単振動運動の一部となる。ばねの長さが伸びて自然の長さに戻り、Aが減速運動に転じると、BはAと離れ、それぞれ独立に運動を始める。AとBのこのような運動について以下の問いに答えよ。ただし、ばねが自然の長さのときのAの位置を基準とし、ばねが伸びる向きを正としたときのAの位置をAの変位 x[m]とする。また、時刻 t[s]の基準はAとBが離れる時刻を $t = 0$ とする。



(1) 手を放した後AとBが離れるまでは、AとBが一体となった単振動の運動を行うが、この単振動の周期と振幅を求めよ。
(2) 手を放してからAとBが離れるまでの時間を求めよ。
(3) AとBが離れる瞬間のBの速さを求めよ。
(4) AとBが離れた後、Bはどのような運動をするかを説明せよ。
(5) AとBが離れた後、Aは独立に単振動の運動をする。この振動の周期と振幅を求めよ。

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第2回宿題　②

問2続き

(6) AとBが離れるまで、($t \leqq 0$)とAとBが離れた後($t > 0$)でのAの変位x[m]を、それぞれの場合について時刻t[s]の関数で表せ。

(7) (6)で求めたtの関数xのグラフの概形を描け。ただし、$M = 3m$とし、tの正領域と負領域での振幅および周期の違いがわかるように描くこと。

答え

問2　(1) 周期$= 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$　　振幅$= \alpha$

(2) $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m+M}{k}}$　　(3) $\alpha\sqrt{\frac{k}{m+M}}$

(4) 等速直線運動

(5) 周期 $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$　　振幅 $\alpha\sqrt{\frac{m}{M+m}}$

(6) $t \leqq 0$ のとき $x = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m+M}}\ t\right)$

$t > 0$ のとき $x = \alpha\sqrt{\frac{m}{m+M}}\ \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第3回予習　①

問1　次の式を計算せよ

(1)　$\left\{\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^{-\frac{1}{3}} =$

(2)　$27^{-\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{3}{2}} \div \sqrt{81^3} =$

問2　次の関数のグラフをかけ

(1)　$\mathrm{y} = \log_2 4x$

(2)　$\mathrm{y} = (\frac{1}{3})^{2\mathrm{x}}$

(3)　$\mathrm{y} = \mathrm{x}^{-\frac{3}{2}}$

問3　次の方程式を解け

(1)　$4^{\mathrm{x}} - 3 \cdot 2^{\mathrm{x}-1} - 1 = 0$

(2)　$\log_3(\mathrm{x}-2) + \log_3(\mathrm{x}-3) - \log_3(\mathrm{x}+1) = 0$

(3)　$\log_4(\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} - 10) + \log_{\frac{1}{4}}(2\mathrm{x}-4) = 0$

問4　次の数を小さい方から順に並べよ

(1)　$\log_5 2,\quad \log_5 3,\quad \frac{1}{2}\log_5 7$

(2)　$1,\quad 2\log_3 2,\quad \frac{1}{3}\log_3 8$

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第3回予習　②

例題1　3^{25}は何桁の数か。また最高位の数字を求めよ。

ただし　$\log_{10}2=0.3010$,　　$\log_{10}3=0.4771$　とする

解　$\log_{10}3^{25} = 25\log_{10}3 = 25 \times 0.4771 = 11.9275$

　これより $3^{25}=10^{11.9275}$ で　$10^{11}<3^{25}<10^{12}$ だから　3^{25}は12桁の数である。

　また $3^{25}=10^{0.9275}\times10^{11}$ であり

　　$\log_{10}8=3\log_{10}2=0.9030$

　　$\log_{10}9=2\log_{10}3=0.9542$ より

　　$8=10^{0.9030}$

　　$9=10^{0.9542}$

　したがって

　　$8<10^{0.9275}<9$

　よって

　　$8\times10^{11}<3^{25}<9\times10^{11}$

　より

　　最高位は8である。

問5　7^{20}は何桁か。またその最高位の数字を求めよ。

　ただし $\log_{10}2=0.3010$,　$\log_{10}3=0.4771$,　$\log_{10}7=0.8451$　とする

答え

問1　(1) $\frac{5}{3}$　　　　(2) $\frac{1}{81}$

問3　(1) x=1　　(2) x=1, 5　　(3) x=　6

問4　(1) $\log_5 2$,　$\log_5\sqrt{7}$,　$\log_5 3$

　　(2) $\frac{1}{3}\log_3 8$, 1, $2\log_3 2$

問5　17桁、最高位は7