

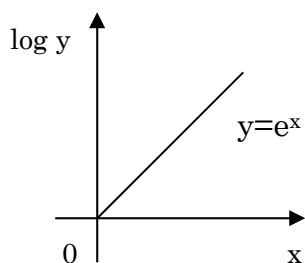
2017 年度・基礎物理学 I 第 3 回講義 ①

【予習】と【宿題】はレポートにして次週の講義の前日までに 7 号館 P514 室に提出すること。答えだけでなく途中計算も書くこと。宿題と予習は講義の時間に配布するが、Web からダウンロードできる。<http://aplab.konan-u.ac.jp/~tokonatu/kisobuturiI-2017/>

指数関数と巾(べき)関数

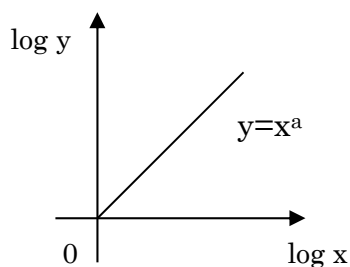
$$y=e^x$$

$$\log y=(\log e)x$$



$$y=x^a$$

$$\log y=a \log x$$



x : 指数 Exponent

片対数グラフ

(semi-log graph)

で直線になる

a : 巾 べき Power

両対数グラフ

(double-logarithmic graph)

で直線になる

問 1 (ネズミ算) 2 匹のネズミのつがいがある。ネズミのつがいはひと月の間に 12 匹の子供を産む。子供も子供同士つがいになるとする。

- (1) 4 ケ月後には何匹になっているか。
- (2) x 月後には y 匹になるとして y を x の関数で表せ

問 2 $^{137}_{55}\text{Cs}$ は $^{137}_{56}\text{Ba}$ に崩壊し 30 年で半分になる (半減期が 30 年)。

100 g の ^{137}Cs は x 年後に y[g]になるとき、y を x の関数で表せ

問 3 ^{137}Cs で汚染された米があったとする。

この米の放射能は $100[\text{Bq/kg}]$ だったとする。

- (1) 1 年後、この米の放射能はいくらになるか？
- (2) 50 年後、この米の放射能はいくらになるか？
- (3) 横軸に時間[年]、縦軸に $[\text{Bq/kg}]$ をとりグラフをかけ

問 4 光があるガラス板を一枚通るごとに、その光度が $\frac{1}{5}$ 失われるとする。

このガラス板を何枚以上重ねるとその光がもとの $\frac{1}{3}$ 以下になるか。

ただし $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする。

$$(\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2})$$

問 5 物体を垂直に落下させた。落下し始めてからの時間を $t[\text{s}]$ 、落下した距離を $h[\text{m}]$ として、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とし以下の問いに答えよ。

- (1) h を t の関数で表し、グラフにせよ
- (2) $t=2[\text{s}]$ から $t=4[\text{s}]$ の間の平均の速さを求めよ
- (3) 落下し始めてから 4 秒後の瞬間の速さを求めよ

問 6 地球大気表面の単位面積に(1 秒間に)垂直に入射する太陽からのエネルギー量(太陽定数)は 1366W/m^2 である。

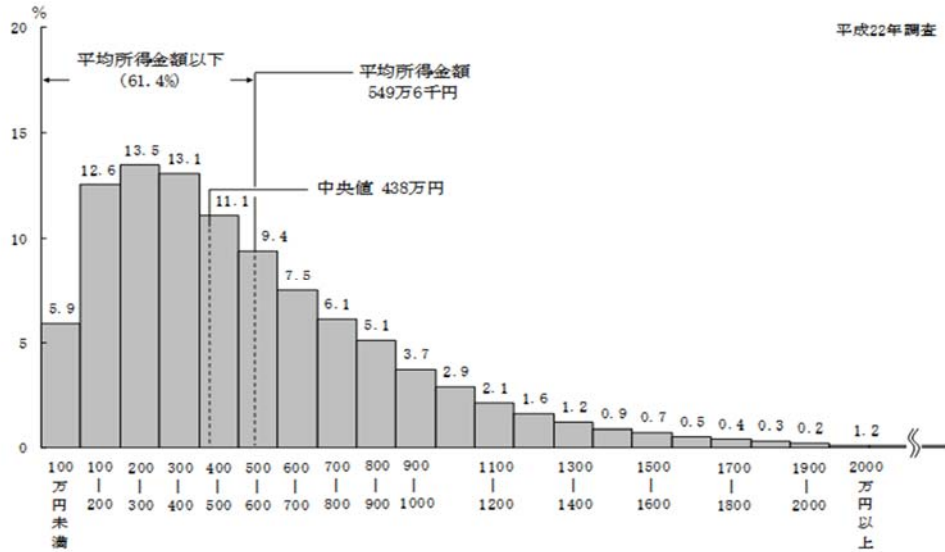
- (1) 地球の半径を 6000km として 1 日に地球に入射する太陽のエネルギーを算出せよ。
- (2) 地球の入射光に対する反射光の割合をアルベドといい約 30% である。地球が 45 億年の間に太陽から受け取ったエネルギーはいくらか。
- (3) 人類が(1 秒間に)使用するエネルギーは 15 兆 J/s である。このエネルギーを地球が太陽から受け取るのにかかる時間を書け。

問 7 1GeV の中性子の平均寿命は約 15 分である。このエネルギーの中性子の速さを 3 億 m/s とし、太陽から中性子が等方的に放出されたとする。

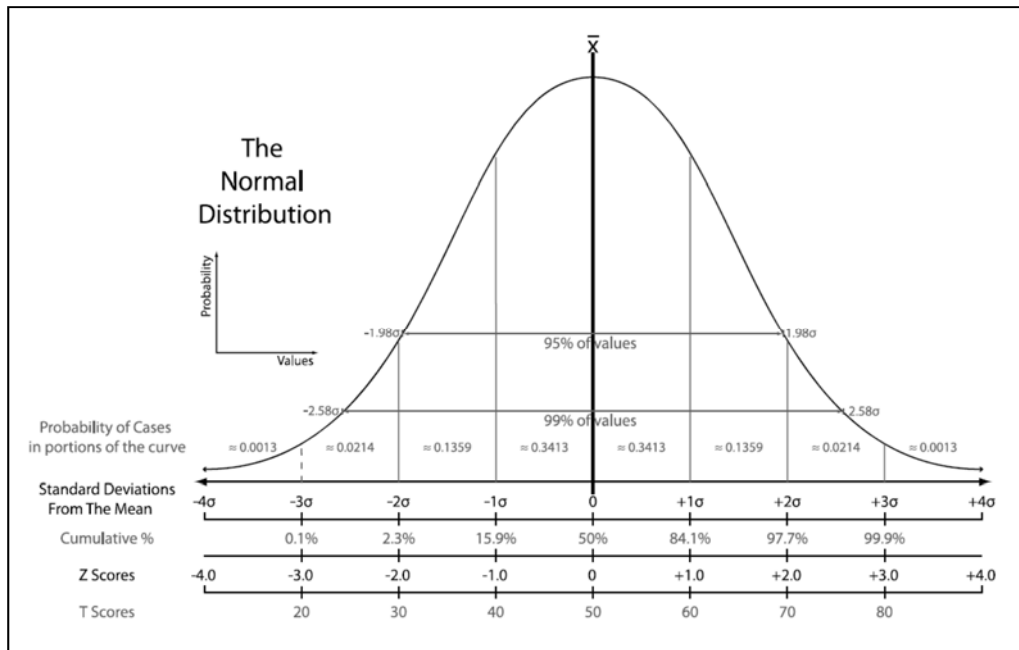
- (1) 太陽までの距離を 1 億 5 千万 km として、太陽から放出された 1GeV 中性子が地球に到達する割合を求めよ。
- (2) 検出面積が 1m^2 の検出器により、太陽からの 1GeV 中性子を 1 秒間に 10 個検出したとする。太陽から放出された中性子放出量を求めよ。

2017 年度・基礎物理学 I 第 3 回講義 ③

日本の平均年間所得(2010 年調査)



・スケールに依存しない現象の分布はべき関数になる。所得、財産、ガラスを砕いた時の大きさ、株価の変動の大きさ、木の枝の長さなどをヒストグラムにするとべき関数になる。



上の分布を正規分布(Normal Distribution)といい、 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$ で表される。

平均値からのずれを標準偏差(Standard Deviation)といい、偏差値(Standard Score, T-Score)は図のように計算される。つまり偏差値 60 なら上から $100-84.1=15.9\%$ 、偏差値 70 なら上から $100-97.7=2.3\%$ になる。

2017 年度・基礎物理学 I 第 3 回宿題 ①

問 1 $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とするとき、次の問いに答えよ

- (1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{25}$ を小数で表すと、小数第何位に 0 でない数字が現れるか。またその数字を求めよ
- (2) 5^n が 100 桁以上の整数となるとき、最少の整数 n の値を求めよ
- (3) $200 < \left(\frac{5}{4}\right)^n < 600$ を満たす整数 n の値を求めよ

問 2 400 人が受験したテストを受験した結果、偏差値が 60 だった。上から数えて順位は何番目か

問 3 年利 0.2% で 100 万円貯金したとします。

以下の問いを電卓を使って計算せよ。

- (1) 1 年後、利子はいくらか。
- (2) 10 年後、貯金はいくらになっているか。
- (3) x 年後、貯金はいくらになっているか。

問 4 お金を 1 年間借りるとき、月利 1.3% と年利 15% ではどちらが得か。

答え

問 1 (1) 第 18 位, 3 (2) $n=144$ (3) $n=24, 25, 26, 27, 28$

問 2 64 番目

問 3 (1) 2000 円 (2) 102 万円 (3) $100 \text{ 万円} \times (1.002)^x$

問 4 年利 15% のほうが得

例題 1 次の計算をせよ。

$$\frac{d}{dx} e^{\sin 3x}$$

解 $3x=t$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = 3$$

したがって

$$\frac{d}{dx} \sin 3x = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \sin t = 3 \cos t = 3 \cos 3x$$

$\sin 3x=s$ とおくと

$$\frac{ds}{dt} = 3 \cos 3x$$

したがって

$$\frac{d}{dx} e^{\sin 3x} = \frac{ds}{dx} \frac{d}{ds} e^s = 3 \cos 3x e^s = 3 \cos 3x e^{\sin 3x}$$

問 1 次の計算をせよ。

(1) $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\log x} \right)$

(2) $\frac{d}{dx} \left(\frac{e^x}{x} \right)$

(3) $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$

(4) $\frac{d}{dt} \left(\frac{\cos t}{t} \right)$

(5) $\frac{d}{dx} (\log \sin x)$

(6) $\frac{d}{dx} (\log \cos x)$

(7) $\frac{d}{dx} (e^{-x^2})$

答え

問 1 (1) $\frac{-1}{x(\log x)^2}$

(2) $\frac{e^x}{x^2} (x - 1)$

(3) $\frac{1}{x^2} (x \cos x - \sin x)$

(4) $\frac{-1}{t^2} (t \sin t + \cos t)$

(5) $\frac{1}{\tan x}$

(6) $-\tan x$

(7) $-2xe^{-x^2}$

テーラー展開：任意の関数 $f(x)$ を巾関数 (x の n 次式) に展開 (巾級数展開)

$x \sim a$ のとき

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \dots$$

… 無限級数

ただし

$$f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n x}{dx^n}$$

例題 2 $f(x) = (1+x)^n$ を $x=a$ のまわりで 2 次の項まで展開せよ。

解 $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

したがって $x \sim a$ のとき

$$f(x) = (1+a)^n + n(1+a)^{n-1}(x-a) + \frac{1}{2}n(n-1)(1+a)^{n-2}(x-a)^2$$

問 2 $f(x) = (1+x)^n$ を $x=2$ のまわりで 3 次の項まで展開せよ。

例題 3 $f(x) = \sin x$ を $x=0$ のまわりで 7 次の項まで展開せよ。

解 $f'(x) = \cos x, f'' = -\sin x, f''' = -\cos x$

$$f^{(4)}(x) = \sin x, f^{(5)}(x) = \cos x, f^{(6)}(x) = -\sin x, f^{(7)}(x) = -\cos x.$$

したがって $x \sim a$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}(x-0) + \frac{-\sin 0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-\cos 0}{3!}(x-0)^3 + \frac{\sin 0}{4!} \\ &\quad + \frac{\cos 0}{5!}(x-0)^5 + \frac{-\sin 0}{6!}(x-0)^6 + \frac{-\cos 0}{7!}(x-0)^7 \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \end{aligned}$$

問 3 $f(x)=\cos x$ を $x=0$ のまわりで 6 次の項まで展開せよ。

答え

問 2 $f(x) \sim 3^n + 3^{n-1}n(x-2) + \frac{1}{2}3^{n-2}n(n-1)(x-2)^2 + \frac{1}{6}3^{n-3}n(n-1)(n-2)(x-2)^3$

問 3 $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$