2017 年度・基礎物理学 I　第 4 回講義　①

【予習】と【宿題】はレポートにして次週の講義の前日までに 7 号館 P514 室に提出すること。答えだけでなく途中計算も書くこと。宿題と予習は講義の時間に配布するが、Web からもダウンロードできる。http://aplab.konan-u.ac.jp/~tokonatu/kisobuturiI-2017/

物理量と微分

・関数 $y = f(x)$の傾き

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x}$$

・位置 $x(t)$にある質点の速さ

$$v = \frac{\Delta x \leftarrow \text{微小な距離}}{\Delta t \leftarrow \text{微小な時間}}$$

☆ある現象をある時間で切り取っても速度は定義される：運動量=質量×速度 は本質的な物理量

・主な微分公式

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \log_e a$$

$$(x^x)' = x^x(1 + \log_e x)$$

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_{10} x)' = \frac{1}{x}\log_{10} e$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

☆　$f(x)g(x)' = f'g + fg'$

☆　$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'g - fg\prime}{g^2}$

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第4回予習　②

テーラー展開：任意の関数 *f(x)*を巾関数（*x* の *n* 次式）に展開（巾級数展開）
x～*a* のとき

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+\cdots$$

… 無限級数

ただし

$$f^{(n)}(x)\equiv\frac{d^n x}{dx^n}$$

例題 2　$f(x)=(1+x)^n$　を x=a のまわりで 2 次の項まで展開せよ。

解　$f'(x)=n(1+x)^{n-1}$

$f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}$

したがって *x*～*a* のとき

$$f(x)=(1+a)^n+n(1+a)^{n-1}(x-a)+\frac{1}{2}n(n-1)(1+a)^{n-2}(x-a)^2$$

問 2　$f(x)=(1+x)^n$　を x=2 のまわりで３次の項まで展開せよ。

例題 3　$f(x)=\sin x$ を x=0 のまわりで 7 次の項まで展開せよ。

解　$f'(x)=\cos x,\quad f''=-\sin x,\quad f'''=-\cos x$

$f^{(4)}(x)=\sin x,\ f^{(5)}(x)=\cos x,\ f^{(6)}(x)=-\sin x.\quad f^{(7)}(x)=-\cos x.$

したがって *x*～*a* のとき

$$f(x)\sim\sin 0+\frac{\cos 0}{1!}(x-0)+\frac{-\sin 0}{2!}(x-0)^2+\frac{-\cos 0}{3!}(x-0)^3\frac{\sin 0}{4!}$$

$$+\frac{\cos 0}{5!}(x-0)^5+\frac{-\sin 0}{6!}(x-0)^6\frac{-\cos 0}{7!}(x-0)^7$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$$

問 3　f(x)=cosx を x=0 のまわりで 6 次の項まで展開せよ。

答え

問 2　$f(x)\sim 3^n+3^{n-1}n(x-2)+\frac{1}{2}3^{n-2}n(n-1)(x-2)^2+\frac{1}{6}3^{n-3}n(n-1)(n-2)(x-2)^3$

問 3　$\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第4回予習　①

例題1　次の計算をせよ。

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\,\mathrm{e}^{\sin 3x}$

解　3*x*=*t* とおくと

$\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}} = 3$

したがって

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\sin 3x = \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,\sin t = 3\cos t = 3\cos 3x$

sin3*x*=s とおくと

$\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = 3\cos 3x$

したがって

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{e}^{\sin 3x} = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dx}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\,\mathrm{e}^{s} = 3\cos 3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{s}} = 3\cos 3x\,\mathrm{e}^{\sin 3x}$

問1　次の計算をせよ。

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{1}{\log x}\right)$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}}\right)$

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{x}}\right)$

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\cos t}{\mathrm{t}}\right)$

(5) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\,(\log\sin x)$

(6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\,(\log\cos x)$

(7) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2})$

答え

問1 (1) $\frac{-1}{\mathrm{x}(\log \mathrm{x})^2}$　(2) $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}^2}\,(x-1)$　(3) $\frac{1}{\mathrm{x}^2}(x cos\,x - \sin x)$

(4) $\frac{-1}{\mathrm{t}^2}(t sin\,t + \cos t)$　(5) $\frac{1}{\tan \mathrm{x}}$　(6) $-\tan \mathrm{x}$

(7) $-2\mathrm{xe}^{-\mathrm{x}^2}$

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第3回宿題　①

問1　$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とするとき、次の問いに答えよ

(1)　$\left(\frac{1}{5}\right)^{25}$ を小数で表すと、小数第何位に0でない数字が現れるか。またその数字を求めよ

(2)　5^n が100桁以上の整数となるとき、最少の整数nの値を求めよ

(3)　$200< \left(\frac{5}{4}\right)^{n} < 600$ を満たす整数nの値を求めよ

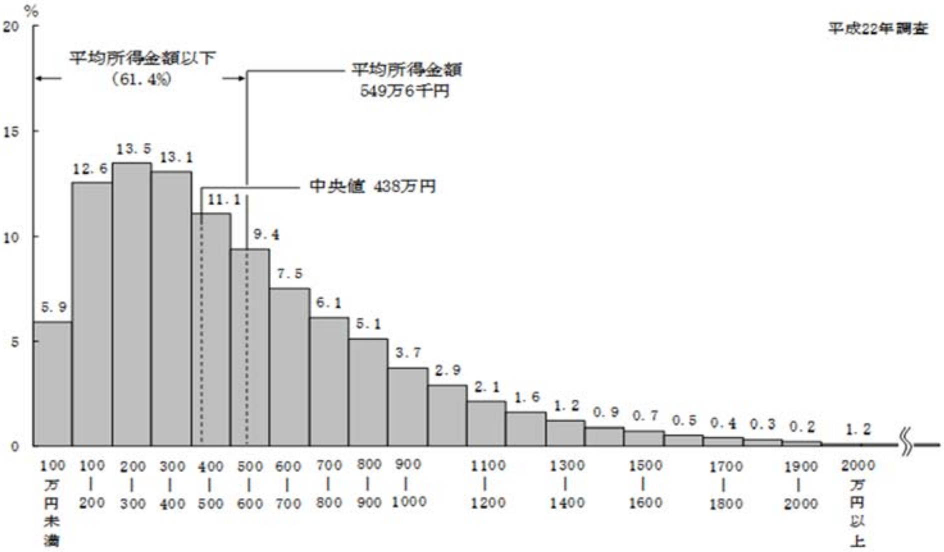
問2　400人が受験したテストを受験した結果、偏差値が60だった。上から数えて順位は何番目か

問3　年利0.2%で100万円貯金したとします。
以下の問いを 電卓を使って計算せよ。
(1)　1年後、利子はいくらか。
(2)　10年後、貯金はいくらになっているか。
(3)　x年後、貯金はいくらになっているか。

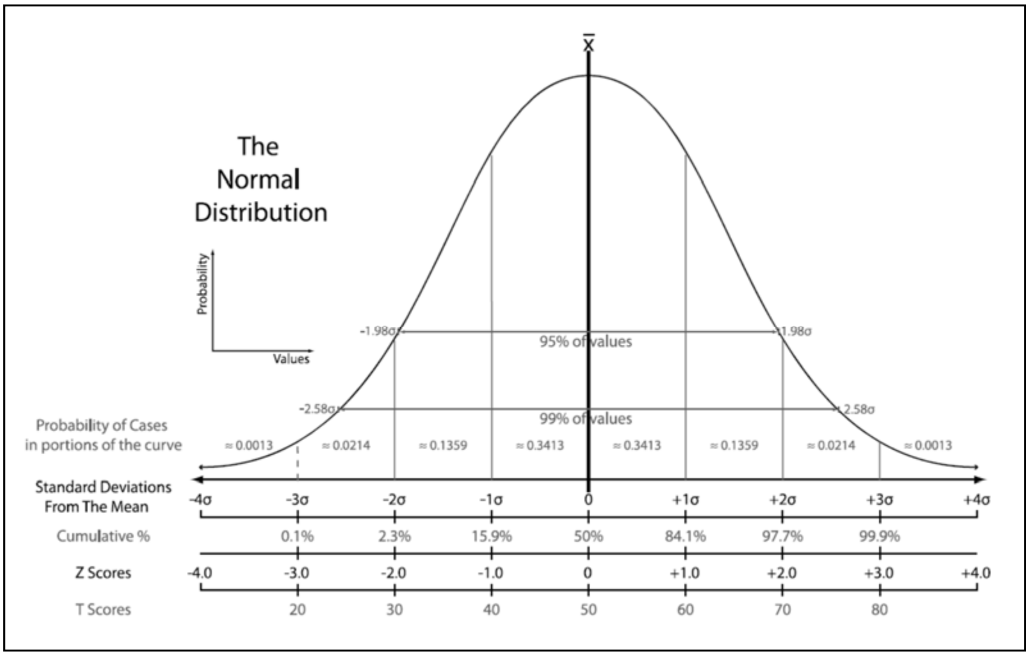
問4　お金を1年間借りるとき、月利1.3%と年利15%ではどちらが得か。

答え
問1　(1) 第18位，3　　(2) n=144　　(3) n=24, 25, 26, 27, 28
問2　64番目
問3　(1) 2000円　　(2) 102万円　　(3) 100万円×$(1.002)^x$
問4　年利15% のほうが得

日本の平均年間所得(2010 年調査)



・スケールに依存しない現象の分布はべき関数になる。所得、財産、ガラスを砕いた時の大きさ、株価の変動の大きさ、木の枝の長さなどをヒストグラムにするとべき関数になる。



上の分布を正規分布(Normal Distribution)といい、$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$　で表される。

平均値からのずれを標準偏差(Standard Deviation)といい、

偏差値(Standard Score, T-Score)は図のように計算される。つまり偏差値 60 なら上から 100-84.1=15.9%、偏差値 70 なら上から 100-97.7=2.3%になる。

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第3回講義　②

問3　$^{137}\mathrm{Cs}$　で汚染された米があったとする。
　この米の放射能は100[Bq/kg]だったとする。
(1)　1年後、この米の放射能はいくらになるか？
(2)　50年後、この米の放射能はいくらになるか？
(3)　横軸に時間[年]、縦軸に[Bq/kg]をとりグラフをかけ

問4　光があるガラス板を一枚通るごとに、その光度が$\frac{1}{5}$失われるとする。
このガラス板を何枚以上重ねるとその光がもとの $\frac{1}{3}$ 以下になるか。
ただし $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする。
$(\log_{10} 5 = \log_{10}\frac{10}{2})$

問5　物体を垂直に落下させた。落下し始めてからの時間をt[s]、落下した距離をh[m]として、重力加速度の大きさを9.8 m/s^{2}とし以下の問いに答えよ。
(1)　hをtの関数で表し、グラフにせよ
(2)　t=2[s]からt=4[s]の間の平均の速さを求めよ
(3)　落下し始めてから4秒後の瞬間の速さを求めよ

問6　地球大気表面の単位面積に(1秒間に)垂直に入射する太陽からのエネルギー量(太陽定数）は1366W/m^{2}である。
(1) 地球の半径を6000kmとして1日に地球に入射する太陽のエネルギーを算出せよ。
(2) 地球の入射光に対する反射光の割合をアルベドといい約30%である。地球が45億年の間に太陽から受け取ったエネルギーはいくらか。
(3) 人類が(1秒間に)使用するエネルギーは15兆J/sである。このエネルギーを地球が太陽から受け取るのにかかる時間を書け。

問7　1GeVの中性子の平均寿命は約15分である。このエネルギーの中性子の速さを3億m/sとし、太陽から中性子が等方的に放出されたとする。
(1)太陽までの距離を1億5千万kmとして、太陽から放出された1GeV中性子が地球に到達する割合を求めよ。
(2)検出面積が1m^{2}の検出器により、太陽からの1GeV中性子を1秒間に10個検出したとする。太陽から放出された中性子放出量を求めよ。

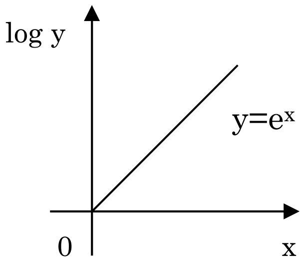
2017 年度・基礎物理学 I　第 3 回講義　①

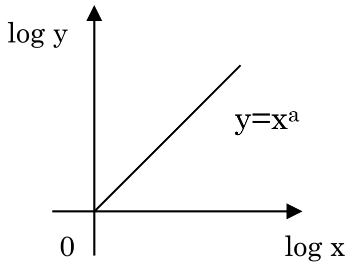
【予習】と【宿題】はレポートにして次週の講義の前日までに 7 号館 P514 室に提出すること。答えだけでなく途中計算も書くこと。宿題と予習は講義の時間に配布するが、Web からもダウンロードできる。http://aplab.konan-u.ac.jp/~tokonatu/kisobuturiI-2017/

指数関数と巾(べき)関数

$y=e^x$
$\log y=(\log e)x$

$y=x^a$
$\log y=a \log x$





x：指数　Exponent
片対数グラフ
(semi-log graph)
で直線になる

a：巾　べき　Power
両対数グラフ
(double-logarithmic graph)
で直線になる

問 1（ネズミ算）2 匹のネズミのつがいがいる。ネズミのつがいはひと月の間に 12 匹の子供を産む。子供も子供同士つがいになるとする。

(1)　4 ケ月後には何匹になっているか。

(2)　x 月後には y 匹になるとして y を x の関数で表せ

問 2　${}^{137}_{55}\mathrm{Cs}$　は　${}^{137}_{56}\mathrm{Ba}$ に崩壊し 30 年で半分になる（半減期が 30 年）。

100 g の ${}^{137}\mathrm{Cs}$　は x 年後に y[g]になるとき、y を x の関数で表せ

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第3回予習　②

例題1　3^{25} は何桁の数か。また最高位の数字を求めよ。

ただし　$\log_{10}2=0.3010$,　　$\log_{10}3=0.4771$　とする

解　$\log_{10}3^{25}=25\log_{10}3=25\times0.4771=11.9275$

これより $3^{25}=10^{11.9275}$ で　$10^{11}<3^{25}<10^{12}$ だから　3^{25} は12桁の数である。

また $3^{25}=10^{0.9275}\times10^{11}$ であり

$\log_{10}8=3\log_{10}2=0.9030$

$\log_{10}9=2\log_{10}3=0.9542$ より

$8=10^{0.9030}$

$9=10^{0.9542}$

したがって

$8<10^{0.9275}<9$

よって

$8\times10^{11}<3^{25}<9\times10^{11}$

より

最高位は8である。

問5　7^{20} は何桁か。またその最高位の数字を求めよ。

ただし $\log_{10}2=0.3010$,　$\log_{10}3=0.4771$,　$\log_{10}7=0.8451$　とする

答え

問1　(1) $\frac{5}{3}$　　　　(2) $\frac{1}{81}$

問3　(1) x=1　　(2) x=1, 5　　(3) x=　6

問4　(1) $\log_5 2$, $\log_5\sqrt{7}$,　$\log_5 3$

(2) $\frac{1}{3}\log_3 8$, 1, $2\log_3 2$

問5　17桁、最高位は7