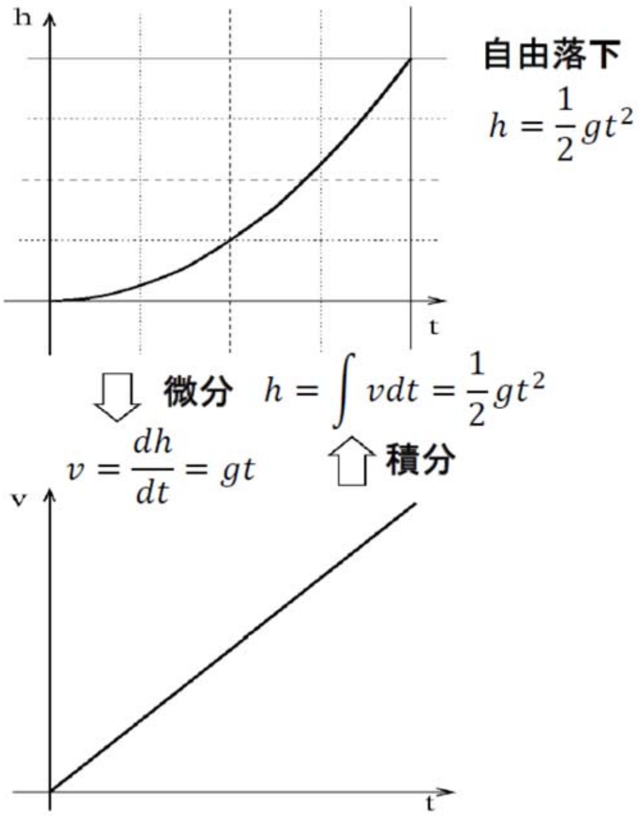
【予習】と【宿題】はレポートにして次週の講義の前日までに 7 号館 P514 室に提出すること。答えだけでなく途中計算も書くこと。宿題と予習は講義の時間に配布するが、Web からもダウンロードできる。http://aplab.konan-u.ac.jp/~tokonatu/kisobuturiI-2017/

物理量と積分

$F(x) = \int f(x)dx$　：積分

$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$　：微分

*F(x)*を *f(x)*の原始関数という



公式：関数 ***f(x)***と ***g(x)***について

$\int (f+g)dx = \int fdx + \int gdx$

$\int fg'dx = fg - \int f'gdx$　（部分積分）

$\int fdx = \int f\frac{dx}{dt}dt$　（置換積分）

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第6回講義　②

問１　$\int log_e 2x dx =$

主な積分公式（積分定数は略）

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \qquad \int \frac{1}{x}dx = log|x| \qquad \int \tan x\ dx = -log|\cos x| \qquad \int \frac{dx}{cos^2 x} = \tan x$$

$$\int \frac{dx}{sin^2 x} = \frac{1}{\tan x} \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} \qquad \int \log x\, dx = x(\log x - 1)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}tan^{-1}\frac{x}{a} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = sin^{-1}\frac{x}{a} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$$

☆主な積分公式は理科年表にのっている

☆数学では $log\, x$ と書くとふつう $log_e x$ 自然対数

物理実験では $log\, x$ と書くとふつう $log_{10} x$ 常用対数

問２　時刻 $t = 0$ のとき、ある国の人口が N_0 だった。

ある時刻 t から t + dt の間に人口 N(t) が dN だけ変化したとする。

dN は平均寿命 S に反比例し dt 及び N(t) に比例する。

比例定数を k として以下の問いに答えよ。

(1)　時刻 t + dt の人口 N(t+dt)を求めよ

(2)　問題文を数式で表すことにより dN を求めよ

(3)　N(t)を t の関数で求めよ

問３　時刻 t における物体の位置を y(t)とする。

位置の時間に対する変化率は速度 v(t)である。

t = 0 のときの位置を y_0 として以下の問いに答えよ。

(1)　微小時間 dt の間に移動する距離 dy を求めよ。

(2)　$v(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + 3$ のとき y(t)を t の関数で求めよ。

問４　半径 a の円筒容器に単位時間あたり一定体積 s の水を注ぎ込む。

時刻 t における水深を h(t)とし、溜まった水の体積を V(t)とする。

ただし h(0) = 0 とする。

(1)　V(t)を h(t)の関数として表せ

(2)　V(t)を s を用いて表せ

(3)　水深が dh だけ変化したときの体積変化 dV を求めよ

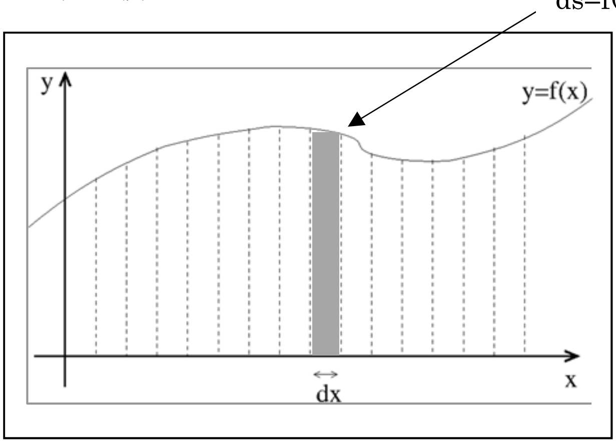
(4)　微小時間 dt の間に注ぎ込まれる水の体積 dV を求めよ

(5)　時刻 t における水面の上昇速度を求めよ

2017 年度・基礎物理学 I　第 6 回講義　③

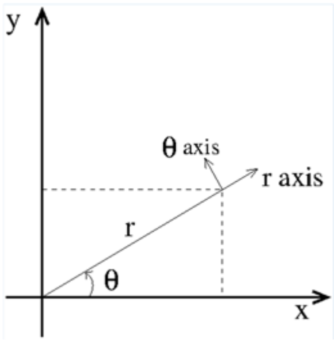
・**区分求積法**　分割して足しあげる

ds=f(x)dx



$$面積\ S=\int_{x=0}^{x=x} ds=\int_{0}^{x} f(x)dx$$

☆２次元極座標



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

・極座標では点（r,θ)の位置により座標軸が動く。

θ軸はθを大きくしたときに動く向き、r 軸は r を大きくしたときに動く向き

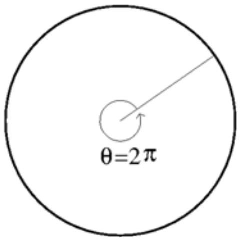
・θ軸と r 軸は常に直交する

☆角度の定義

・radian　：ラジアン

中心角θ　半径 1 の円弧の長さが radian

例えば$\theta = 2\pi$ のとき円弧の長さは2π[radian]



・degree：度, デグリー

１年を 360 日として（5000 年前の暦）

地球が 1 日で動く角度を 1degree

$2\pi[\mathrm{rad}] = 360[\mathrm{deg}]$

問５　太陽の視直径は 0.53 度である。

また地球の公転半径を天文単位[AU]といい、$1.5 \times 10^{11}\mathrm{m}$である。

太陽の直径を求めよ。

［答え：$1.4 \times 10^{9}[\mathrm{m}]$］

☆　$\frac{2\pi}{360} \simeq 57 \simeq 60$　を覚えておくこと

例　$60[\mathrm{deg}] = \frac{60}{60} = 1[\mathrm{rad}]$

$45[\mathrm{deg}] = \frac{45}{60} = 0.75[\mathrm{rad}]$

$2[\mathrm{rad}] = 2 \times 60 = 120[\mathrm{deg}]$

2017 年度・基礎物理学Ⅰ　第 6 回宿題　①

問１　次の不定積分を求めよ

(1) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$　(2) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+4} dx$　(3) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$　(4) $\int x e^{\frac{x}{2}} dx$

問２　次の定積分を求めよ

(1) $\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3-1} dx$　(2) $\int_0^2 \frac{dx}{9-x^2}$　(3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos x \, dx$　(4) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+2}$

［答え］問１

(1) $\log(e^x+e^{-x})+c$　(2) $\log(x^2-3x+4)+c$　(3) $\tan x - \frac{1}{\cos x} + c$　(4) $2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + c$

［答え］問２ (1) $\log \frac{26}{7}$　(2) $\frac{1}{6}\log 5$ (2) $\frac{1}{160}$　(4) $\frac{1}{2}\log\frac{3e}{e+2}$

問３　風船に単位時間あたり一定体積 S の空気を吹き込む。時刻 t における風船を半径 r(t)の球とし、その体積を V(t)とする。ただし r(0) = 0 とする。

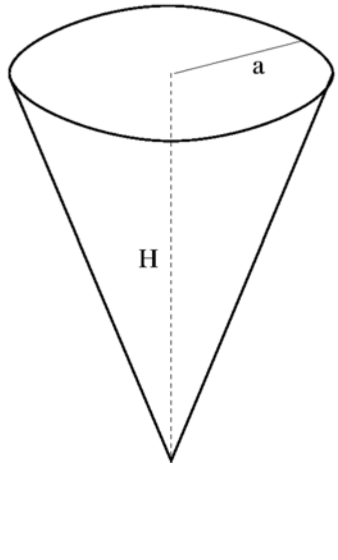
(1)　微小時間 dt 後に風船は体積 dV だけ変化した。dV を S と dt であらわせ。

(2)　V を r の関数としてあらわせ。

(3)　時刻 t における風船の膨張速度（半径の変化率）を r の関数として求めよ。

（答え）　(3) $\frac{dr}{dt} = \frac{dV}{dt}\frac{1}{\frac{dV}{dr}} = \frac{S}{4\pi r^2}$

問４　図のように高さ H、半径 a の逆円錐形の容器がある。
水を入れた容器の底から単位時間当たり一定量 S の水を流し出す。
時刻 t における水面の高さを x(t)、水の体積を W(t)とする。



(1)　W の減少する割合（時間変化）と S の間に成り立つ式を書け。

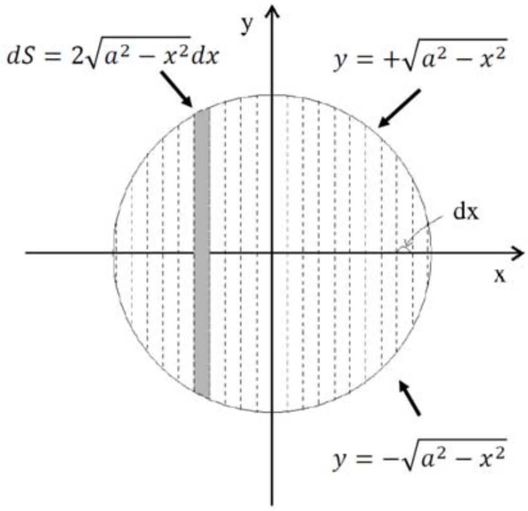
(2)　W を x の関数として書け。

(3)　水面の高さが x の時の水面の下降速度を x の関数として求めよ。

（答え）　(2) $W = \frac{\pi}{3}\frac{a^2}{H^2}x^3$　(3) $\frac{dx}{dt} = \frac{dW}{dt}\frac{1}{\frac{dW}{dx}} = \frac{S}{\pi}\left(\frac{H}{a}\right)^2\frac{1}{x^2}$

2017 年度・基礎物理学Ⅰ　第 7 回予習　①

例題１　半径 a の円の面積を$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ で囲まれた部分の面積として求めよ。



解　y 軸と平行に幅 dx の短冊状に分解すると

$$S=\int_{x=-a}^{x=a}ds$$

$$=\int_{-a}^{a}2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=2\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$x=a\cos\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$$

$$\therefore dx=-a\sin\theta\,d\theta$$

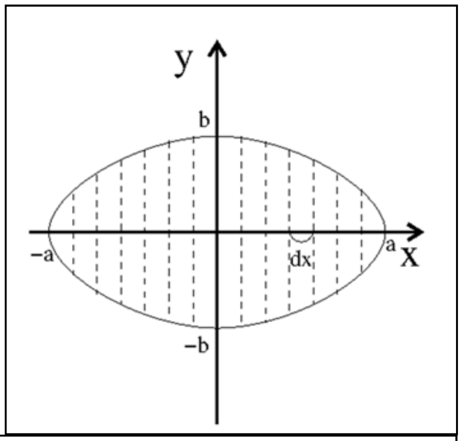
$$S=-2a^2\int_{\theta=\pi}^{\theta=0}(1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}\sin\theta d\theta=-2a^2\int_{\pi}^{0}\sin^2\theta d\theta$$

$$=-2a^2\int_{\pi}^{0}\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)d\theta$$　（倍角の公式より）

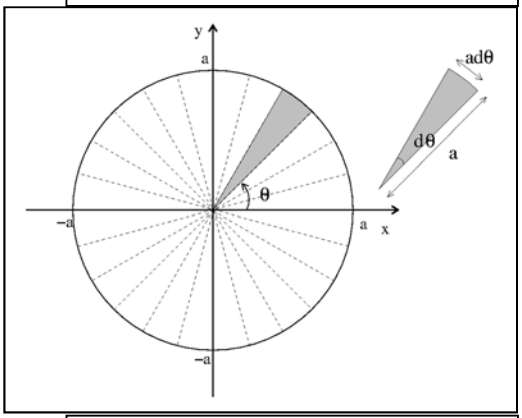
$$=-a^2\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{\pi}^{0}$$

$$=\pi a^2$$

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第7回予習　②



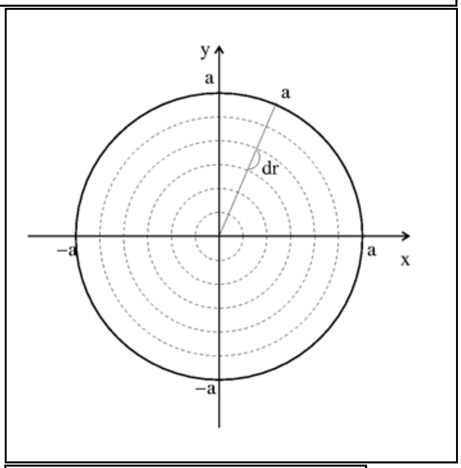
問１　$a > 0,\ b > 0$　のとき楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれた図形の面積を、例題１と同じ計算方法で、２曲線 $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ で囲まれた部分の面積として求めよ。(答え　πab)



例題２　半径 a の円の面積を中心角 dθ の扇形に放射状に分割して求めよ。

解

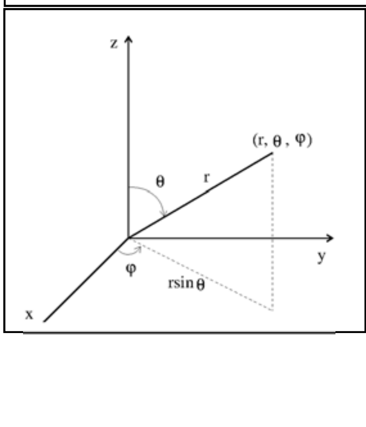
$$S = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} a^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 [\theta]_0^{2\pi} = \pi a^2$$



問２　半径 a の円の面積を同心円状に分割して求める。以下の問いに答えよ。

(1)　半径 r の円と半径 r + dr の円によって囲まれた図形の面積 ds を求めよ。（ヒント：円周×dr）

(2)　ds を r = 0 から r = a まで積分して円の面積を求めよ。



問３　３次元極座標 (r, θ, φ) は下の図で定義される。このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$ である。

３次元極座標で、点 $\left(3,\ \frac{\pi}{3}.\ \frac{\pi}{6}\right)$ を図示せよ。