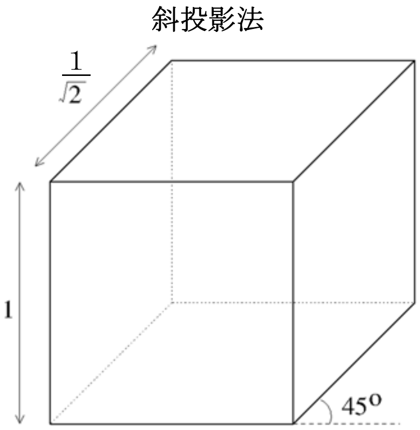
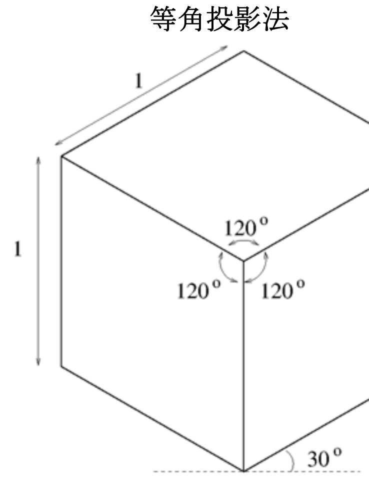
2017 年度・基礎物理学 I　第 9 回講義　①

【予習】と【宿題】はレポートにして次週の講義の前日までに 7 号館 P514 室に提出すること。答えだけでなく途中計算も書くこと。宿題と予習は講義の時間に配布するが、Web からもダウンロードできる。http://aplab.konan-u.ac.jp/~tokonatu/kisobuturiI-2017/

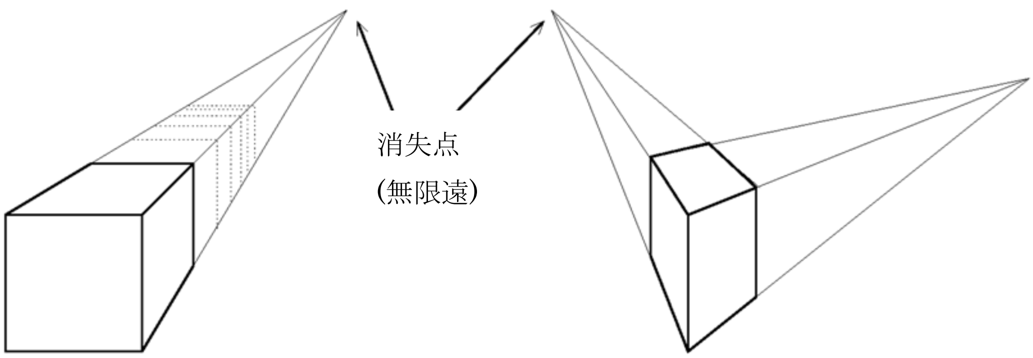
３次元空間の表し方

投影法：３次元の物体を２次元で表す
projection

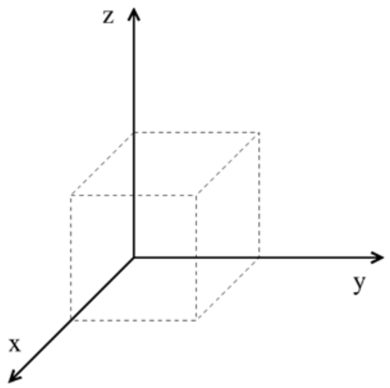


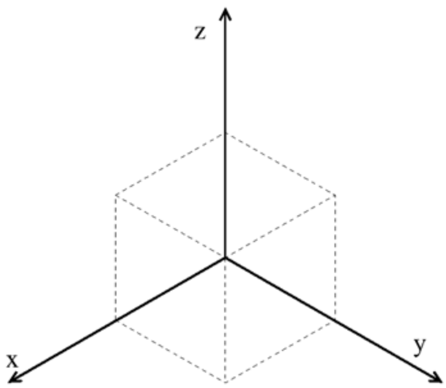


遠近法：奥行きを表現する絵画技法
perspective



・３次元直交座標：投影法で表す



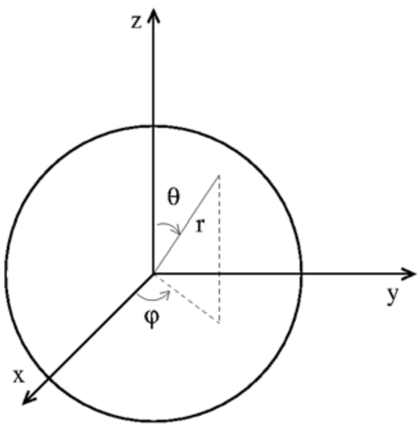


この座標軸の取り方を **右手系直交座標** という

親指：x　　　　　　人差し指：y　　　　　　中指：z

3 次元図形の対称性　(点対称、線対称、面対称)

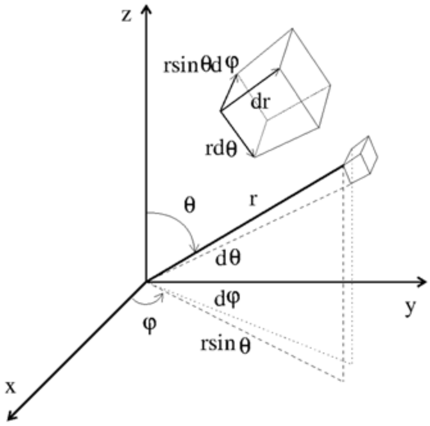
・点対称　**point symmetry**



地球の重力や太陽の放射、点電荷の作る電場など
極座標を使うと計算が楽

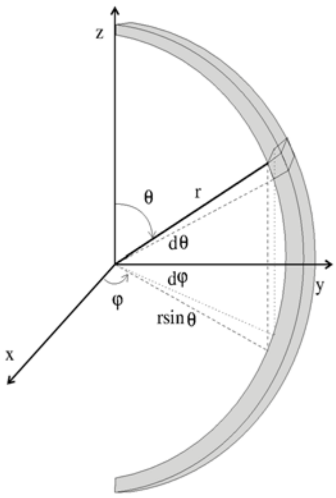
・極座標で行う球の積分

Step 1　微小領域の体積を求める。



$$dv = r\,\sin\theta d\theta, rd\varphi, dr$$
$$= r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$$

Step 2　$\theta = 0$から$\theta = \pi$ まで積分して半円の弧の長さを求める。



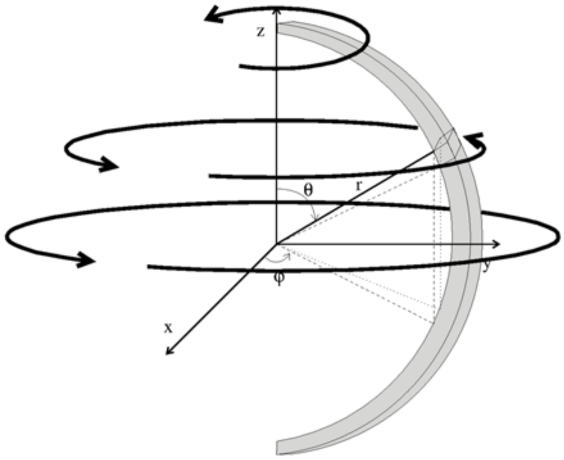
$$\int dv = \iint \left[\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \sin\theta d\theta\right] d\varphi dr$$
$$= \iint [-r^2\cos\theta]_0^\pi d\varphi dr$$
$$= 2\iint r^2 d\varphi dr$$

$\boxed{\text{Step 3}}$　$\varphi = 0$ から $\varphi = 2\pi$ まで積分して球殻の体積を求める。

$$\int dv = 2\iint_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r^2 d\varphi dr$$

$$= 2\int [r^2\varphi]_0^{2\pi}\, dr$$

$$= 4\pi \int r^2 dr$$

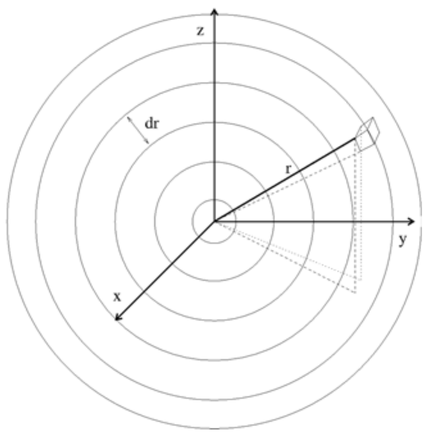


$\boxed{\text{Step 4}}$　$r = 0$ から $r = a$ まで積分して球の体積を求める。

$$\int dv = 4\pi \int_0^a r^2 dr$$

$$= 4\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$



まとめ

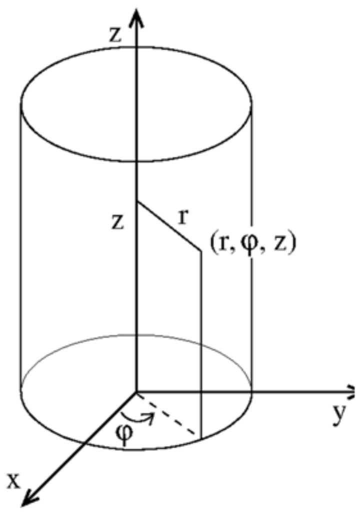
$$V = \underbrace{\int_{r=0}^{r=a} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta}_{\text{半径 r の半円の弧}} d\varphi}_{\text{球殻}} dr}_{\text{球の体積}}$$

2017 年度・基礎物理学Ⅰ　第 9 回講義　⑤

・線対称

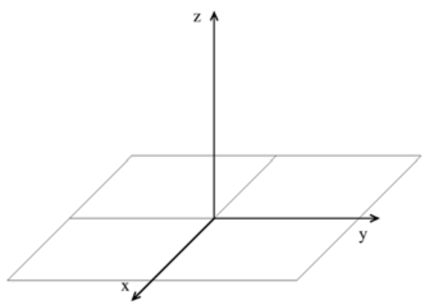
・直線電流が作る磁場、レーザー光からの散乱光など

・円柱座標$(\mathrm{r}, \varphi, \mathrm{z})$ を使うと計算しやすい



・面対称

・コンデンサー、地面からの放射線、夜光など



問１　一般に星の質量密度は星の内部ほど重くなる。ある星の密度が$\rho = ar + b$ で表されるとする。a と b は定数、r は星の中心からの距離で星の半径を R とする。星の全質量を求めよ。

問２　点 $X_0(A, B, C)$を通り、ベクトル$\mathbf{d} = (a, b, c)$ に平行な直線の方程式を求めよ。

問３　点 $X_0(A, B, C)$を通り、ベクトル$\mathbf{d} = (a, b, c)$ に平行な直線の方程式を媒介変数を用いて表せ。

問４　点 $X_0(A, B, C)$を通り、ベクトル$\mathbf{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面の方程式を書け。

問５　点 $X_0(A, B, C)$を通り、２つのベクトル $\mathbf{a}_1 = (a_1, b_1, c_1)$　$\mathbf{a}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ に平行な平面を媒介変数 t と s を用いて書け。

問６　平行六面体 ABCD-EFGH において、辺 AB, AD をそれぞれ 2:1, 3:2 に内分する点を K, L とし、対角線 AG と△EKL の交点を P とする。このとき AP：PG を求めよ。

2017 年度・基礎物理学Ⅰ　第 9 回宿題　①

問１　４点 A (2, 0, 0),　B (0, 1, 0),　C (0, 0, 2),　D (1, 2, 1) がある。A, B, C を通る平面と直線 OD の交点 P の座標を求めよ。

問２　次の直線を媒介変数 t を用いて表せ。

(1)　$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = z - 5$

(2)　$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = z - 3$

問３　点 (2, 1, 3)と平面 $6x + 3y - 2z = -5$ の距離を求めよ。

問４　同一平面上にない４点 A (0, -3, -4),　B (1, 0, 0),　C (-2, -4, 1),　D (2, -5, -2)がある。線分 AB, AC, AD を３辺にもつ平行六面体の他の頂点の座標を求めよ。

問５　４点 A (2, 0, 3),　B (0, 2, -1),　C (1, 1, 2),　D (x, 1, 1)が同一平面上にあるとき、x の値を求めよ。

（ヒント）問 1 平面の方程式を ax+by+cz=d と置いて、連立方程式を立て a,b,c,d を求めいる。次に直線の方程式を媒介変数 t を使って書き、それを平面の方程式に入れ t を求める。

問２与式=t と置いて、(x,y,z)を媒介変数 t をつかってあらわす。ちなみに(1)の直線は点(1,-2,5)を通りベクトル(4,3,1)に並行

問 3　平面に垂直なベクトル(法線ベクトル)は(6,3,-2)だから、与えられた点を通りこの法線ベクトルに並行な直線を媒介変数を使って書き、その直線と平面の交点を求め、交点と与えられた点の距離を求める。

問 4 まず並行六面体を図示すること。例えばその頂点を ABCE-DFGH と表すと、$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$

問 5　平面をベクトル方程式で表すか、平面の方程式で表し、連立方程式から変数を決定する。

（答え）

問 1　$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

問 3　$\frac{14}{7}$

問 4　$(-1,-1,5), (3,-2,\ 2), (1,-3,7), (0,-6,3)$

問 5　$x = 1$

2017 年度・基礎物理学 I　第 10 回予習　①

ベクトルを横に書いたものを横ベクトル、または行ベクトル (a, b, c) といい、

縦に書いたものを縦ベクトルまたは列ベクトル$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ という。

行ベクトルと列ベクトルをまとめたものを行列という。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

・行列のたし算　２つの行列の計算に以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

・行列のかけ算

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{13} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

例題 1　以下の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

解 $\begin{pmatrix} 5-2 & 4-4 \\ 7-1 & 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

解 $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 + 4\cdot 1 & 5\cdot 4 + 4\cdot 6 \\ 7\cdot 2 + 8\cdot 1 & 7\cdot 4 + 8\cdot 6 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 14 & 44 \\ 22 & 76 \end{pmatrix}$

(3) $(a\ \ b\ \ c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

解 $(ax + by + cz)$

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第10回予習　②

問１　以下の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(x \quad y \quad z)$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

答え(1) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 23 \\ 37 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 21 & 16 & 11 \\ 39 & 30 & 21 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

問２　$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$ のとき、以下の計算をせよ。

(1) $A^2 (= AA)$　(2) $AB - BA$

答え (1) $\begin{pmatrix} -14 & 9 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 65 \\ 137 & -3 \end{pmatrix}$

問３　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき A^3 を計算せよ。

答え　$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 18 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第10回予習　③

例題２　行列Aに対して　$AE = EA = A$　となる行列を単位行列といい、

２行２列単位行列は$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　で、３行３列単位行列は$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$　　となる行列 A^{-1} を A の逆行列という。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} は　$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

ここで det A = ad-bc を A の行列式といい、det A が 0 なら逆行列はない。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　のとき A^{-1} を求めよ。

解　　$\det A = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$　したがって　$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

問４　逆行列を求めよ。

(1)　$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$　　　　　（答え）(1) $-\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

例題３　次の連立方程式を行列を使って解きなさい。

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

解　与式より　$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　　また　$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

両辺に逆行列をかけると

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 - 2\cdot 1 \\ -5\cdot 1 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

したがって　　　$x = 1$

$y = -1$

問５　次の連立方程式を 行列を使って解きなさい。

$$\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

（答え）　$x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{5}{2}$