2017年度・基礎物理学Ⅰ　第10回講義　①

【予習】と【宿題】はレポートにして次週の講義の前日までに7号館P514室に提出すること。答えだけでなく途中計算も書くこと。宿題と予習は講義の時間に配布するが、Webからもダウンロードできる。http://aplab.konan-u.ac.jp/~tokonatu/kisobuturiI-2017/

・スカラー：大きさを表す量　1, 3, a, x　など

・ベクトル：大きさと方向を表す量　(1, 2)　(1, 2, 3)
$\overrightarrow{\mathrm{A}}$　$\boldsymbol{x}$　など（位置も表すと位置ベクトル）

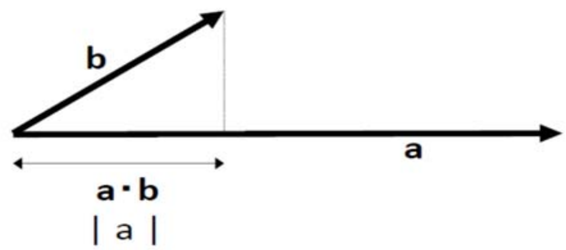
☆高校では $\vec{x}$ と書くが大学では$\boldsymbol{x}$と書く
☆　x を χと書いてはいけない

・行　列：ベクトルを複数並べて拡張したもの
matrix

・テンソル：行列を複数ならべて拡張したもの
tensor

・ベクトルのかけ算
・内積（スカラー積）　　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\,cos\theta$
inner Product

射影：$\boldsymbol{b}$ の$\boldsymbol{a}$ 方向成分は $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$



問１　２つのベクトル（1, 2) (3, 4)　が張る平行四辺形の面積を求めよ。

問２　２つの位置ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,1,0)$ $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (4,1,1)$ がある。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が∠AOB を２等分するような線分 AB 上の点 P の座標を求めよ。

・外積（ベクトル積）：　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

Outer Product

$$\left(\mathrm{a_x}, \mathrm{a_y}, \mathrm{a_z}\right) \times \left(\mathrm{b_x}, \mathrm{b_y}, \mathrm{b_z}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{a_y b_z - a_z b_y} \\ \mathrm{a_z b_x - a_x b_z} \\ \mathrm{a_x b_y - a_y b_x} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{a_x}$　$\mathrm{a_y}$　$\mathrm{a_z}$　$\mathrm{a_x}$

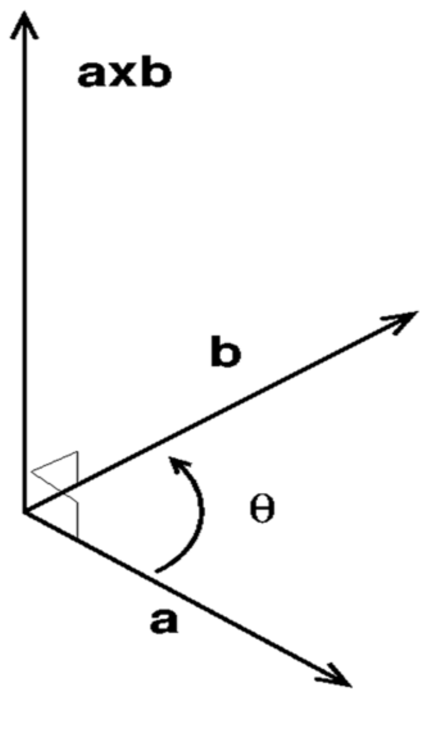
$\mathrm{b_x}$　$\mathrm{b_y}$　$\mathrm{b_z}$　$\mathrm{b_x}$

↓　↓　↓

z　x　y

← こうやって書くと　少し覚えやすくなる

大きさは$\boldsymbol{a}$と $\boldsymbol{b}$が張る平行四辺形の面積で内きは$\boldsymbol{a}$と $\boldsymbol{b}$に垂直で右ねじ



$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \mathrm{ab}\sin\theta$$

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第10回講義　③

問３　x y 平面上の定点 C (a, b)　および P (x_0, y_0) と動点 Q (x, y)について
以下の問いに答えよ。

(1)　２つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$が垂直である時、x と y の関係を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$の外積を求めよ。

(3)　点 P を通りベクトル$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$に平行な直線の式を求めよ。

・ベクトルの変形

①ベクトルを大きくするには

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{a 倍になる}$$

②x 方向に大きくする

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ y \end{pmatrix}$$

③なにもしない

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

④角度 θ だけ回転する

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{pmatrix}$$

z 軸のまわりに θ 回転

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ \sin\theta\, x - \cos\theta\, y \\ z \end{pmatrix}$$

問４　ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1, 2)$を 原点 0 を中心に左向きに 30°　回転させたベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を求め図示せよ。

問５　x 軸のまわりを回転させる３行３列の回転行列を書け。

問６　$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき

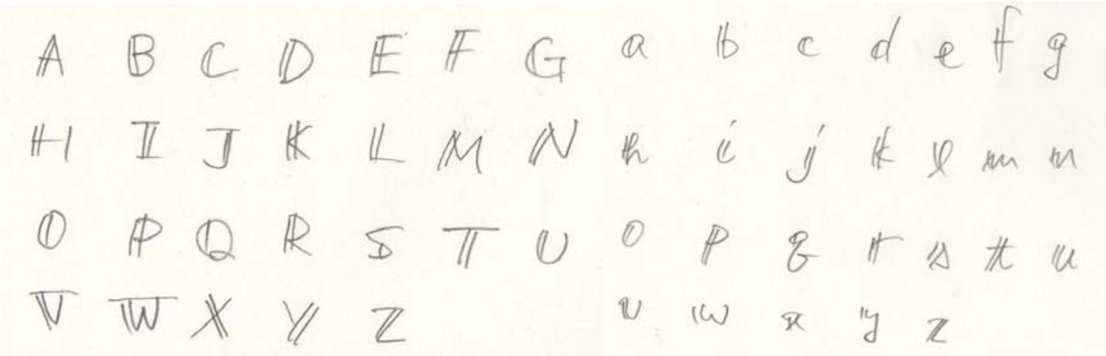
$\mathrm{A}\boldsymbol{a} = \mathrm{k}\boldsymbol{a}$ となる定数 k と x の値を求めよ。
このとき k を A の固有値、$\boldsymbol{a}$ を固有ベクトルという。

問７　行列 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$,　$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ について、次の等式を満たす行列を求めよ。

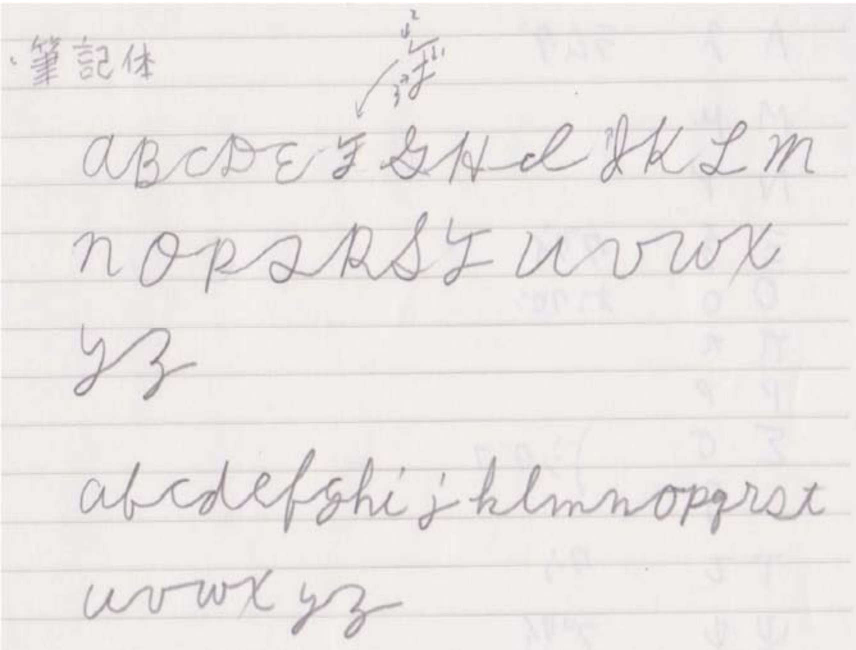
(1)　AX = B　　　　(2)　YA = B

2017 年度・基礎物理学Ｉ　第 10 回講義　④

アルファベットのベクトル表記を書いてみよう



筆記体　*abcdefghijklmn*…



ギリシャ文字(24 文字ある。下によく使うものを挙げる)

Α	α	アルファ	Ι	ι	イオタ	Π	π	パイ
Β	β	ベータ	Κ	κ	カッパ	Ρ	ρ	ロー
Γ	γ	ガンマ	Λ	λ	ラムダ	Σ	σ	ς　シグマ
Δ	δ	デルタ	Μ	μ	ミュー	Τ	τ	タウ
Ζ	ζ	ゼータ	Ν	ν	ニュー	Ψ	ϕ	プサイ
Η	η	エータ	Ξ	ξ	グザイ、クシー	Φ	ϕ	ファイ
Θ	θ	シータ	Ο	o	オミクロン	Ω	ω	オメガ

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第10回宿題　①

問１　$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$　　$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$　　$C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 2\\ -4 & 0\end{pmatrix}$

のとき、$X-2A=3(X-B)+C$ を満たす行列 X を求めよ。

問２　$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$　　$B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ のとき次の行列を求めよ。

(1)　$A^{-1}B^{-1}$　　(2)　$(AB)^{-1}$

問３　次の等式を満たす a, b の値を求めよ。

$$\begin{pmatrix}a & b\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}b & -1\\ -2 & a\end{pmatrix}$$

問４　$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ のとき A^3 を求めよ。

問５　アルファベットのベクトル表記と筆記体表記を A から z まで大文字と小文字で書け。

答え

問 1　$\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -8 & 2\\ 9 & -3\end{pmatrix}$

問 2　(1) $\frac{1}{70}\begin{pmatrix}-2 & -12\\ 8 & 13\end{pmatrix}$　　(2) $\frac{1}{70}\begin{pmatrix}6 & 8\\ -5 & 5\end{pmatrix}$

問 3　$a=3,\ b=1$

問 4　$\begin{pmatrix}1 & 6 & 21\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2017年度・基礎物理学Ⅰ　第11回予習　①

例題１　行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される１次変換による点（2, -1)の像を求めよ。

解　この一次変換の式は

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　である。このとき、点（2, -1)の像は

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ であるから、点（4, -1)

問１　行列 $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ で表される移動による次の点の像を求めよ。

(1)　点(1, 0)　　　　(2)　点(0, 1)

(3)　点(0, 0)　　　　(4)　点(-2, 3)

（答え）(1) (2, 1)　　(2)(-3, -2)　　(3)(0, 0)　　(4)(-13, -8)

例題２　点（2, -1), (-1, 1)をそれぞれ点(3, 4), (-2, -1)に移す１次変換を表す行列を求めよ。

解　この１次変換の式を

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　とすると

$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ゆえに

$\begin{cases} 2a - b = 3 \\ -a + b = -2 \end{cases}$　　$\begin{cases} 2c - d = 4 \\ -c + d = -1 \end{cases}$

したがって

$a = 1,\ b = -1,\ c = 3,\ d = 2$

求める行列は

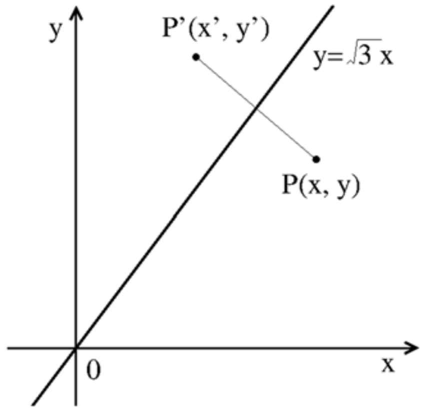
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

問２　点(1, 0)　(0, 1)をそれぞれ点(2, -3) (-1, 4)に移す１次変換を表す行列を求めよ。
またこの移動による点(3, -2)の像を求めよ。

（答え）　$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$,　$(8, -17)$

例題３　直線 $y=\sqrt{3}x$ に関する対称移動を 行列を用いた式で表せ。

解　直線 $y=\sqrt{3}x$ に関して点 $P(x,y)$ と対称な点 $P'(x',y')$ とする。
線分 PP'の中点はこの直線上にあり、
線分 PP'はこの直線と垂直であるから



$$\frac{y+y'}{2}=\sqrt{3}\frac{x+x'}{2} \qquad \frac{y'-y}{x'-x}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

これにより

$$\begin{cases}\sqrt{3}x'-y'=-\sqrt{3}x+y\\ x'+\sqrt{3}y'=x+\sqrt{3}y\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

この式に

$$\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$ を左から掛けると

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

よって求める式は

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

問３　直線 $y=2x$ に関する対称移動を、行列を用いた式で表せ。

（答え）$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$