

2017 年度・基礎物理学 I 第 11 回講義 ①

【予習】と【宿題】はレポートにして次週の講義の前日までに 7 号館 P514 室に提出すること。答えだけでなく途中計算も書くこと。宿題と予習は講義の時間に配布するが、Web からダウンロードできる。<http://aplab.konan-u.ac.jp/~tokonatu/kisobuturiI-2017/>

$A = (x, y)$ から $A' = (x', y')$ への対応を変換という。

$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ のように 1 次式で表される変換を1 次変換という。

変換により、点や図形を移動することを写像といい、 A' のことを像という。

問 1 (2013 年入試問題) xy 平面において点 $(2, 0)$ を点 $(1, \sqrt{3})$ へ、点 $(1, \sqrt{3})$ を点 $(-1, \sqrt{3})$ へ移す 1 次変換 f を表す行列を A とする。 $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし、 B が表す 1 次変換を g とする。

以下の問いに答えよ。

- (1) A および A^3 を求めよ。
- (2) A^6 が表す 1 次変換によって点 $(1, 0)$ が移る点の座標を求めよ。
- (3) 合成変換 $f \circ g$ を表す行列を C とするとき、 $c^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる最少の自然数 n を求めよ。

問 2 (2013 年入試問題) α を $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす角度とする。平面上に直線 $y = x \tan \alpha$ がある。点 P を原点を除く平面上の任意の点とし、その直交座標を (x, y) 、極座標を (r, θ) とする。点 P の直線 $y = x \tan \alpha$ に関する対称移動は原点 O を中心とした角度 α の回転移動 f と x 軸に関する対称移動 g の合成変換 $f \circ g \circ f^{-1}$ として考えることができる。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の直交座標 (x, y) を極座標 (r, θ) を用いて表せ。
- (2) 回転移動 f によって点 P は極座標 $(r, \theta + \alpha)$ の点へ移動する。三角関数の加法定理を用いて変換 f を表す行列を求めよ。
- (3) 変換 g , 変換 f^{-1} を表す行列を求めよ。
- (4) 変換 f^{-1} による点 P の像の直交座標を x, y, α を用いて書け。
- (5) 合成変換 $f \circ g \circ f^{-1}$ を表す行列を求め、合成変換 $f \circ g \circ f^{-1}$ による点 P の像 P' の直交座標を x, y, α を用いて書け。

問 3 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ かつ $x^2 + y^2 = 1$ となる x, y, k の値を求めよ。

(答え $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $k = 2$, $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $k = 5$)

問 4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ について

$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ かつ $x^2 + y^2 = 1$ となる x, y, k の値を求めよ。

(答え $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $k = 3$)

2017 年度・基礎物理学 I 第 11 回宿題 ①

問 1 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。

- (1) $AP = PA$ のとき、 a, b, c, d の間に成り立つ関係式を求めよ。
 (2) $AQ = QA$ のとき、 a, b, c, d の間に成り立つ関係式を求めよ。

問 2 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = P^{-1}AP$ のとき次の問いに答えよ。

- (1) B, B^2 を求めよ。
 (2) 自然数 n に対して A^n を求めよ。

問 3 座標平面上の任意の点 P から直線 $y=x$ に垂線をひき、その交点を H とし、線分 PH の中点を P' とする。点 P を点 P' に移す移動を表す行列を求めよ。

問 4 連立 1 次方程式 $\begin{cases} (a-1)x + ay = 0 \\ 2x + (a+2)y = 0 \end{cases}$ が $x=0, y=0$ 以外の解をもつように

a の値を定めよ。

(答え)

問 1 (1) $b = c, a = d$ (2) $b = c = 0$

問 2 (1) $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B^2 = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$

(2) $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2 \cdot 2^n & 2(5^n - 2^n) \\ 5^n - 2^n & 2 \cdot 5^n + 2^n \end{pmatrix}$

問 3 $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

問 4 $a = 2, -1$

$a = 2$ のとき $y = -\frac{1}{2}x$ に縮退

$a = -1$ のとき $y = -2x$ に縮退

2017 年度・基礎物理学 I 第 12 回予習 ①

問 1 質量 m のボールを速さ v_0 で真上に投げた。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

- (1) ボールにかかる力の大きさ F と向きを書け。
- (2) 加速度を a として運動方程式を書け。
- (3) ボールを投げてから最高点に達するまでにかかる時間 t_1 を求めよ。
- (4) 最高点の高さ h_1 を求めよ。
- (5) ボールが元の位置まで落ちてくるまでにかかる時間 t_2 を求めよ。

[答え (3) $t = v_0/g$ (4) $\frac{v_0^2}{2g}$ (5) $2\frac{v_0}{g}$]

問 2 ボールを 19.6 m/s の速さで真上に投げた。重力加速度を 9.8 m/s^2 として以下の問いに答えよ。

- (1) 投げてから 1.0s 後のボールの高さと速さと向きを求めよ。
- (2) 投げてから 3.0s 後のボールの高さと速さと向きを求めよ。
- (3) ボールが元の位置まで落ちてくるまでにかかる時間とその時の速さを求めよ。

[答え (1) 14.7m , 9.8m/s , 上向き (2) 14.7m , 下向き 9.8m/s (3) 4s]

問 3 地上より 29.4m の高さの A 点より小石を落下させると同時に、地上から真上に向かって初速度 19.6m/s でボールを投げ上げた。

重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 として以下の問いに答えよ。

- (1) 小石とボールがすれ違うまでにかかる時刻を求めよ。
- (2) すれ違う時の小石とボールの速さはいくらか。

[答え (1) 1.5s (2) 小石 14.7m/s , ボール 4.9 m/s]