12 回講義

問 2 解答例

運動方程式は

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\alpha\dfrac{dx}{dt} & ① \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg - \alpha\dfrac{dy}{dt} & ② \end{cases}$$

②の両辺を t で積分すると

$$\int m\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)dt = -\int mgdt - \int \alpha\frac{dy}{dt}dt$$

約分して

$$\int md\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\int mgdt - \int \alpha dy$$

従って

$$\mathrm{m}\frac{dy}{dt} = -mgt - \alpha y + C$$

もちろん、dy/dt は y 軸方向の速さである。

C は積分定数。

t=0 の時 y=0, dy/dt = $v_0\sin\theta$ より

$$\mathrm{C} = \mathrm{m}v_0\sin\theta$$

従って

$$\frac{dy}{dt} = -gt - \frac{\alpha}{m}y + v_0\sin\theta$$

$$= -\frac{\alpha}{m}\left(y + \frac{m}{\alpha}gt\right) + v_0\sin\theta$$

ここで$\mathrm{Y} = \mathrm{y} + \frac{m}{\alpha}gt$とおくと、

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{m}{\alpha}g$$

従って

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dY}{dt} - \frac{m}{\alpha}g$$

これを上の式に代入すると

$$\frac{dY}{dt} - \frac{m}{\alpha}g = -\frac{\alpha}{m}Y + v_0\sin\theta$$

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\left(Y - \frac{m}{\alpha}v_0\sin\theta - \frac{m^2}{\alpha^2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(Y \underline{- \frac{m}{\alpha}v_0\sin\theta - \frac{m^2}{\alpha^2}}\right)$$

t で微分したら 0

$$= -\frac{\alpha}{m}\left(Y - \frac{m}{\alpha}v_0\sin\theta - \frac{m^2}{\alpha^2}\right)$$

上の変形を係数変化法という。ここで変数分離法を使うと

$$\frac{d\left(Y - \frac{m}{\alpha}v_0\sin\theta - \frac{m^2}{\alpha^2}\right)}{Y - \frac{m}{\alpha}v_0\sin\theta - \frac{m^2}{\alpha^2}} = -\frac{\alpha}{m}dt$$

両辺積分して

$$\log_e\left(Y - \frac{m}{\alpha}v_0\sin\theta - \frac{m^2}{\alpha^2}\right) = -\frac{\alpha}{m}t + C$$

$$\mathrm{Y} - \frac{m}{\alpha}v_0\sin\theta - \frac{m^2}{\alpha^2} = e^C e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

ここで C は積分定数。

t=0 のとき Y=0 より

$$e^C = -\frac{m}{\alpha}v_0\sin\theta - \frac{m^2}{\alpha^2}$$

従って、

$$\mathrm{Y} = \left(-\frac{m}{\alpha}v_0\sin\theta - \frac{m^2}{\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

$$\mathrm{y} = \frac{m}{\alpha}\left\{\left(v_0\sin\theta + \frac{m}{\alpha}g\right)\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) - gt\right\}$$

~~~~~~

ついでに x 方向も解いておくと

①の両辺を t で積分すると

$$\int m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)dt = -\alpha\int\frac{dx}{dt}dx$$

従って

$$\mathrm{m}\frac{dx}{dt} = -\alpha x + C$$

t=0 の時の初期条件を入れると

$$\mathrm{C} = \mathrm{m}v_0\cos\theta$$

従って

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\left(x - \frac{m}{\alpha}v_0\cos\theta\right)$$
~~~~~~

係数変化させて

$$\frac{d}{dt}\left(x-\frac{m}{\alpha}v_0\cos\theta\right)=-\frac{\alpha}{m}\left(x-\frac{m}{\alpha}v_0\cos\theta\right)$$

変数分離で積分し、初期条件を入れると

$$x=\frac{m}{\alpha}v_0\cos\theta\left(1-e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)$$

12 回宿題　問 1

(1)　X 軸に垂直上向きに Y 軸をとる。

運動方程式は

$$\begin{cases}-mg\sin\beta=m\dfrac{d^2X}{dt^2}\\ -mg\cos\beta=m\dfrac{d^2Y}{dt^2}\end{cases}$$

t で積分して、初期条件を入れて、もう一度積分して初期条件を入れると

$$\begin{cases}X=v_0\cos(\alpha t)-\dfrac{1}{2}g\sin(\beta t^2)\\ Y=v_0\sin(\alpha t)-\dfrac{1}{2}g\cos(\beta t^2)\end{cases}$$

Y=0 のとき$\mathrm{t}=2v_0\sin\alpha/g\cos\beta$だから、このとき三角関数の公式を使うと

$$\mathrm{X}=\frac{2v_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\beta}\cos(\alpha+\beta)$$

(2)

$$\frac{dX}{d\alpha}=\frac{2v_0^2}{g\cos^2\beta}\cos(2\alpha+\beta)$$

$\alpha_{max}=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}$のとき

$$X_{max}=\frac{v_0^2}{g\cos^2\beta}(1-\sin\beta)$$

(3)略

問 2

(1)　$\mathrm{F}=-\alpha\mathrm{v}-\mathrm{mg}$

(2)　$-\alpha\mathrm{v}-\mathrm{mg}=\mathrm{m}\frac{d^2h}{dt^2}$

(3)

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{\alpha}{m}\left(v+\frac{m}{\alpha}g\right)$$

係数変化法を使って

$$\frac{d}{dt}\left(v+\frac{m}{\alpha}g\right)=-\frac{\alpha}{m}\left(v+\frac{m}{\alpha}g\right)$$

従って

$$v+\frac{m}{\alpha}\mathrm{g}=\mathrm{C}e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

初期条件より

$$v=\frac{mg}{\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha}{m}t}-1\right)$$

(4) t → ∞のとき$e^{-\frac{\alpha}{m}t}\to 0$だから

$$v(\infty)\to-\frac{mg}{\alpha}$$